

# Esercizi sulle Derivate\*

prof. Enrico Centenaro  
*email:* <enrico@centenaro.net>  
*web:* [www.centenaro.net](http://www.centenaro.net)

A.S. 2009/2010

## Sommario

Questo documento contiene degli esercizi su argomenti relativi al calcolo differenziale (problemi di massimo, studio di funzione, applicazione dei classici teoremi sulle derivate).

È stato pensato per un utilizzo autonomo nell'ambito della preparazione della seconda prova dell'esame di stato di uno studente liceale.

*È ovvio, ma è meglio ribadirlo, che gli esercizi che non sono risolti sono assolutamente da fare!*

Questo documento è stato prodotto utilizzando L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X<sup>1</sup> un magnifico ambiente per la redazione di documenti scientifici e non.

Suggerimenti, critiche... saluti, sono i benvenuti, in bocca al lupo.

Dedicato a Massimo

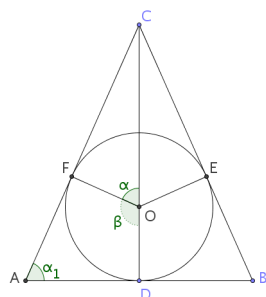
---

\*Quest'opera è stata rilasciata sotto la licenza Creative Commons Attribuzione-Non commerciale-Non opere derivate 2.5 Italia. Visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/publicdomain/> per leggerne una copia o spedisci una lettera a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

<sup>1</sup>cfr <http://latexproject.org> e <http://linuxitalia.org>

**Esercizio 1** Data la circonferenza di raggio  $R$ , fra tutti i triangoli isosceli  $ABC$  circoscritti, di vertice  $C$ , determinare quello che:

1. ha area massima
2. e la base più l'altezza massimi.



### Preliminari

Scegliamo l'angolo  $\alpha \in (0, \pi/2)$  come il parametro del problema, allora  $\beta = \pi - \alpha$  perché  $\widehat{F} = \widehat{D} = \pi/2$ , quindi  $\widehat{FOC} = \alpha$  come mostrato in figura. Dato che il triangolo  $FOC$  è rettangolo in  $F$  si ricava  $FO = OC \cos \alpha$  e quindi  $OC = FO / \cos \alpha$  quindi

$$OC = R / \cos \alpha \quad (1)$$

Inoltre  $DC = DO + OC = R + R / \cos \alpha = R + R / \cos \alpha$  quindi:

$$DC = R(\cos \alpha + 1) / \cos \alpha \quad (2)$$

Inoltre, dato che  $AB = 2AD$ , si ottiene la prima funzione da massimizzare, l'area  $Area = AB \cdot DC / 2$  quindi:

$$f(\alpha) = Area = R^2 \frac{(\cos \alpha + 1)^2}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

Inoltre la seconda funzione da considerare è la somma fra la base e l'altezza,  $Base + Altezza = AB + DC$  quindi:

$$g(\alpha) = Base + Altezza = R \frac{(\cos \alpha + 1)(2 \cos \alpha + \sin \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

### Ricerca estremi

Per determinare eventuali massimi e minimi si devono calcolare le derivate prime di  $f(\alpha)$  e  $g(\alpha)$ :

$$f'(\alpha) = R^2 \frac{1 - 2 \cos^3 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}$$

$$g'(\alpha) = R \frac{\sin^3 \alpha + 2 \sin^2 \alpha (\cos \alpha + 1) - 2 \cos \alpha - 2}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}$$

Risolviamo la disequazione  $f'(\alpha) \geq 0$ , che, tenendo conto dei fattori positivi, si semplifica in:

$$2 \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 1 \leq 0$$

che diventa

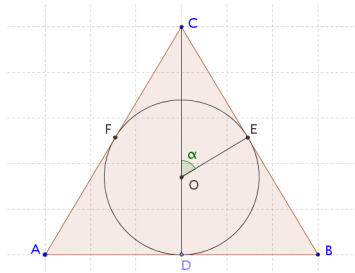
$$(\cos \alpha + 1)^2 (\cos \alpha - 1) \geq 0$$

Le soluzioni sono  $\alpha \in (\pi/3, \pi/2)$  (tenendo conto del dominio), perciò la funzione decresce fino a  $\pi/3$  e poi cresce successivamente:  $\alpha = \pi/3$  è un minimo.

✱

**Esercizio 2** La ricerca degli estremi di  $g(\alpha)$  è lasciata allo studente volentoso.

**Esercizio 3** Fra tutti i coni circolari retti circoscritti a una sfera di raggio  $R$  verificare che quello di minima area laterale ha il suo vertice che dista  $R\sqrt{2}$  dalla superficie sferica.



### Preliminari

Il grafico rappresenta la sezione dell'oggetto con un piano passante per l'asse del cono. Consideriamo la lunghezza  $x = CO$ ,  $x \in (R, +\infty)$  come il parametro del problema.  $S_{lat} = \frac{1}{2}$  perimetro di base apotema =  $\frac{1}{2} 2\pi AD AC = \pi AD AC$ . È immediato vedere che i triangoli  $ADC$  e  $OFC$  sono simili, inoltre  $FC = \sqrt{x^2 - r^2}$ . Perciò  $CD : AC = FC : OC$  da cui  $AC = (x + R) \frac{x}{\sqrt{x^2 - r^2}}$ ,

$$AC = x \sqrt{\frac{x + R}{x - R}}$$

e ancora,  $AD : FO = DC : FC$ , da cui  $AD = R \frac{(R+x)}{\sqrt{x^2 - R^2}}$ ,

$$AD = R \sqrt{\frac{x + R}{x - R}}$$

La funzione da studiare è  $f(x) = S_{lat}$ :

$$f(x) = \pi R x \frac{x+R}{x-R}$$

con la restrizione che  $x > R$  (per evidenti considerazioni geometriche).

### Ricerca estremi

La derivata della funzione  $f(x)$  è

$$f'(x) = \pi R \frac{x^2 - 2Rx - R^2}{(x-R)^2}$$

Tenendo conto delle restrizioni geometriche e dei fattori che sono positivi, gli estremi si calcolano risolvendo la disequazione:

$$x^2 - 2Rx - R^2 \geq 0$$

Che ha soluzioni per  $x \leq R(1 - \sqrt{2}) \vee x \geq R(1 + \sqrt{2})$ , siccome  $x > R$ , la derivata è positiva per  $x \geq R(1 + \sqrt{2})$  e negativa per  $R < x < R(1 + \sqrt{2})$ . Quindi  $x = R(1 + \sqrt{2})$  è un minimo.

La distanza dalla superficie della sfera è  $x - R$  che è  $\sqrt{2}R$ .

**Esercizio 4** Data una sfera di raggio  $R$ , determinare:

1. il cono di volume minimo circoscritto alla sfera,
2. il cono di volume massimo inscritto alla sfera.

### Soluzione del punto 1

Per il disegno e la scelta del parametro si veda l'esercizio 3.

Volume Cono =  $\frac{1}{3}$  Area di base altezza,  $CO = x$ ,  $AD = R\sqrt{\frac{x+R}{x-R}}$ ,  $CD = x + R$ . La funzione volume è dunque

$$f(x) = \frac{\pi R}{3} \frac{(x+R)^2}{(x-R)} \text{ con } x > r$$

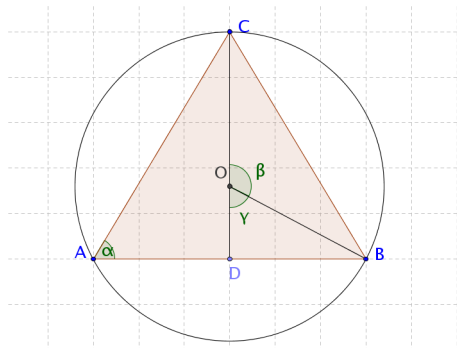
la cui derivata è

$$f'(x) = \frac{\pi R}{3} \frac{(x+R)(x-3R)}{(x-R)^2} \text{ con } x > r$$

La disuguaglianza  $f'(x) \geq 0$  si risolve facilmente colla regola dei segni tenendo conto che il fattore  $(x-R)^2 > 0$ , così pure  $\frac{\pi R}{3} > 0$ .

Dunque  $x = 3R$  è un minimo, e il cono di volume massimo è alto  $4R$  e ha raggio di base  $\sqrt{2}R$ .

## Soluzione del punto 2



Dato che  $\alpha$  e  $\beta$  insistono sullo stesso arco e  $\alpha$  è alla circonferenza, mentre  $\beta$  è al centro si deduce subito che  $\beta = 2\alpha$  e  $\gamma = \pi - \beta$ . Quindi  $OB = R$ ,  $DB = OB \sin(\pi - 2\alpha) = R \sin 2\alpha$ ,  $OD = DB \cos(\pi - 2\alpha) = -R \cos 2\alpha$ ,  $CD = R - R \cos 2\alpha = R(1 - \cos 2\alpha)$ . Il volume è dunque:

$$Volume = \frac{\pi}{3} R^3 \sin^2 2\alpha (1 - \cos 2\alpha)$$

Prendendo come parametro  $x = CD$  con  $0 < x < 2R$  in modo simile all'esercizio 3, si ottiene  $DB = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} = \sqrt{x(2R - x)}$ , allora

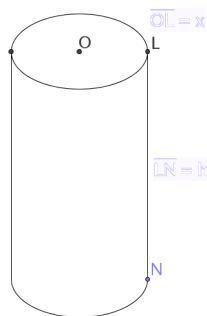
$$V(x) = \frac{\pi}{3} x^2 (2R - x)$$

La derivata prima è

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} (4Rx - 3x^2)$$

Risolvendo la disuguaglianza e tenendo conto delle restrizioni su  $x$  si deduce che  $x = 4R/3$  è un massimo. Il cono cercato ha perciò altezza  $4R/3$  e raggio di base  $2\sqrt{2}R/3$ .

**Esercizio 5** Fra tutti i cilindri di volume assegnato  $V = 25\pi$ , determinare quello di superficie totale minima. Determinare poi la superficie e il volume della sfera a esso circoscritta.



### Preliminari

Scegliamo come variabile  $x$  del problema il raggio del cerchio di base. Allora  $V = \pi x^2 h$ , uguagliando al valore assegnato  $25\pi = \pi x^2 h$  otteniamo  $h = 25/x^2$ . La funzione che rappresenta la superficie laterale diventa:

$$S_{lat}(x) = 2\pi x h = \frac{50\pi}{x}$$

La superficie totale allora è la somma fra quella laterale e il doppio dell'area di base, la funzione da minimizzare perciò diventa:

$$S(x) = \frac{50\pi}{x} + 2\pi x^2$$

Con la ovvia restrizione che  $x > 0$ .

### Ricerca estremi

Calcoliamo la derivata della funzione  $S(x)$  e ne studiamo il segno.

$$S'(x) = -\frac{50\pi}{x^2} + 4\pi x = \frac{2x^3 - 25}{x^2}$$

Dato che  $x > 0$  la disuguaglianza  $S'(x) \geq 0$  equivale a:

$$2x^3 - 25 \geq 0$$

Che ha soluzione (l'esponente di  $x$  è dispari)  $x \geq \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$ , perciò  $x = \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$  è un minimo.

L'altezza del cilindro si trova utilizzando la formula  $h = 25/x^2$ , semplificando si ottiene  $h = 5\sqrt[3]{4/5}$  e il volume diventa  $V = \pi(\sqrt[3]{25/2})^2 5\sqrt[3]{4/5} = 25\pi$ , ovviamente.

Per calcolare il raggio della circonferenza circoscritta basta notare che se noi sezioniamo con un piano passante per l'asse del cilindro otteniamo un rettangolo di dimensioni  $2x$  e  $h$ , la diagonale del rettangolo è il diametro della sfera. Perciò basta applicare il teorema Pitagora:

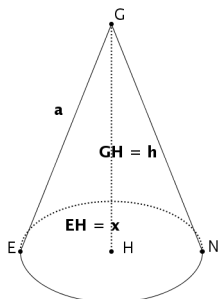
$$R = \sqrt{x^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \dots = \sqrt[9]{2 \cdot 5^4}$$

Con questo raggio calcoliamo il volume e la superficie cercati:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \dots = \frac{40}{3}\pi \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

$$S = 4\pi R^2 = \dots = 4\pi \sqrt[9]{2^2 \cdot 5^8}$$

**Esercizio 6** *Fra tutti i coni di apotema fissato, determinare quello di volume massimo.*



### Preliminari

Per calcolare il volume dobbiamo determinare l'altezza che, siccome il triangolo  $GHN$  è rettangolo, si ricava subito col teorema di Pitagora:  $h = \sqrt{R^2 + a^2}$ . Il volume è perciò  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{R^2 + a^2}$ . Scegliamo come parametro del problema  $x = R$ , le limitazioni si deducono dalla rappresentazione grafica e sono  $0 < x < a$ . La funzione da studiare è:

$$V(x) = \frac{\pi x^2}{3} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 < x < a)$$

### Ricerca estremi

Calcoliamo la derivata della funzione  $V(x)$  e valutiamo dove è positiva, tenendo conto delle restrizioni su  $x$ .

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{\pi}{3} \left( 2x\sqrt{a^2 - x^2} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} (-2x) \right) \\ &= \frac{\pi}{3} \left( \frac{4x(a^2 - x^2) - 2x^3}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \\ &= \frac{\pi x}{3\sqrt{a^2 - x^2}} (2(a^2 - x^2) - x^2) \\ &= \frac{\pi x(2a^2 - 3x^2)}{3\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Dato che  $0 < x < a$  la disequazione  $V'(x) \geq 0$  equivale a

$$2a^2 - 3x^2 \geq 0$$

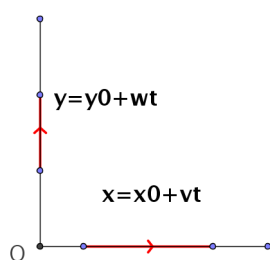
Le cui soluzioni nell'intervallo  $(0, a)$  sono  $(0, a\sqrt{2/3})$  (dato che  $a\sqrt{2/3} < a$ ); perciò nel punto  $x = a\sqrt{2/3}$  c'è un massimo.

Per vedere se è un massimo assoluto calcoliamo il valore della funzione  $V(x)$  negli estremi dell'intervallo  $(0, a)$ .  $V(0) = V(a) = 0$  dunque  $V(a\sqrt{2/3}) = \frac{2}{27}\sqrt{3}\pi a^3$  è il valore massimo assunto.

**Esercizio 7** *Fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto verificare che quello che ha il volume massimo ha l'altezza pari a un terzo dell'altezza del cono. [Sugg. prendere come parametro  $x$  l'altezza del cilindro.]* \*

**Esercizio 8** *Dato un cilindro equilatero (altezza e diametro di base uguali), determinare il cono di volume minimo con base complanare al cilindro, circoscritto al cilindro. Sia  $a$  il raggio di base. [Sugg. se  $x$  è l'altezza del cono allora  $x = 6a$ , cioè il triplo dell'altezza del cilindro.]* \*

**Esercizio 9** *Due navi si muovono su traiettorie rettilinee perpendicolari fra loro con velocità fisse e costanti. Trovare la distanza minima. Supporre  $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$ .*



### Preliminari

Le leggi del moto forniscono le coordinate della posizione delle navi al variare del tempo. La distanza fra le due navi si ottiene con il teorema di Pitagora:

$$d(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(y_0 + wt)^2 + (x_0 + vt)^2}$$

con la restrizione che  $t > 0$ .

### Ricerca estremi

Come al solito calcoliamo la derivata e ne studiamo il segno.

$$\begin{aligned} d'(t) &= \frac{2(y_0 + wt) + 2(x_0 + vt)}{\sqrt{(y_0 + wt)^2 + (x_0 + vt)^2}} \\ &= \frac{y_0 + x_0 + (v + w)t}{\sqrt{(y_0 + wt)^2 + (x_0 + vt)^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

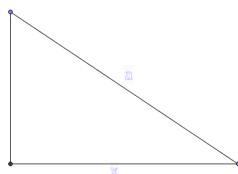
Risolviamo la disuguaglianza che si ottiene ponendo la derivata (3) positiva:

$$\begin{aligned}y_0 + x_0 + (v + w)t &\geq 0 \\ t(v + w) &\geq -(x_0 + y_0)\end{aligned}$$

1. Se  $v + w = 0$  allora, dato che  $x_0 + y_0 > 0$  la funzione è strettamente crescente e si ha un minimo per  $t = 0$ ;
2. se  $v + w > 0$  allora per  $t = -\frac{x_0+y_0}{v+w}$  si ha un minimo;
3. mentre se  $v + w < 0$  per  $t = -\frac{x_0+y_0}{v+w}$  si ha un massimo, quindi un minimo lo si ha per  $t = 0$ .

Sostituendo  $t = -\frac{x_0+y_0}{v+w}$  nella espressione della distanza si ottiene  $d = \sqrt{2} \left| \frac{y_0 v - x_0 w}{v+w} \right|$ .

**Esercizio 10** *Fra tutti i triangoli aventi la stessa ipotenusa quello isoscele ha l'area massima.*



### Preliminari

L'altezza del triangolo si ottiene utilizzando il teorema di Pitagora:  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , le restrizioni sulla base sono evidentemente  $0 < x < a$ .

La funzione da studiare è allora:

$$A(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} \quad 0 < x < a$$

### Ricerca estremi

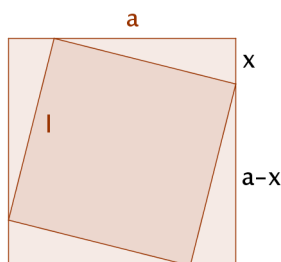
$$\begin{aligned}A'(x) &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - 2x^2}} \right)\end{aligned}\tag{4}$$

Tenendo conto delle restrizioni di  $x$  la (4) è positiva se

$$a^2 - 2x^2 \geq 0$$

La soluzione nell'intervallo  $(0, a)$  è  $0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}$  perciò  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  è un minimo e per tale valore  $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  quindi  $x = h$  e il triangolo è isoscele.

**Esercizio 11** *Fra tutti i quadrati inscritti in un quadrato assegnato, trovare quello di area minima.*



### Preliminari

Il triangolo che ha lati  $l, a - x, x$  è un triangolo rettangolo, perciò  $l = \sqrt{x^2 - (a - x)^2}$  con  $0 < x < a$ . La funzione da studiare è l'area del quadrato di lato  $l$ , cioè:

$$A(x) = l^2 + (a - x)^2$$

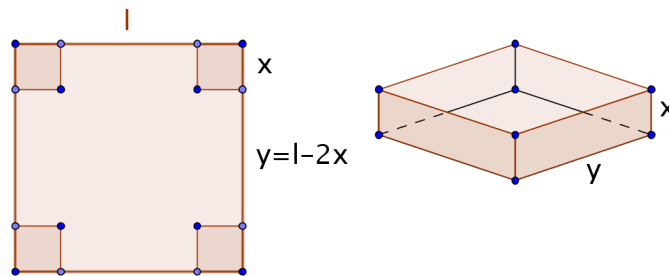
### Ricerca estremi

Calcoliamo la derivata e ne studiamo il segno:

$$\begin{aligned} A'(x) = 2x + 2(a - x)(-1) &\geq 0 \\ 4x &\geq 2a \\ x &\geq a/2 \end{aligned}$$

Tenendo conto della restrizione su  $x$  ( $0 < x < a$ ), la soluzione è  $a/2 < x < a$ , perciò  $a/2$  è un minimo. Perciò il quadrato cercato è il rombo che ha vertici nei punti medi del quadrato esterno e ha lato  $a\sqrt{2}/2$  e area  $a^2/2$ .

**Esercizio 12** *Ai quattro angoli di un foglio metallico quadrato vengono ritagliati quattro quadrati, poi si piegano i lembi in modo da realizzare una scatola aperta. Quale dimensione devono avere questi quadrati affinché l'area della scatola sia massima?*



### Preliminari

Evidentemente  $2x + y = l$  quindi  $y = l - 2x$  con la restrizione  $0 < x < l/2$  che deriva dal fatto che  $x > 0$  e che  $l - 2x > 0$ . La funzione da studiare è allora:

$$\begin{aligned} V(x) &= y^2 x \\ &= (l - 2x)^2 x \end{aligned}$$

### Ricerca estremi

Calcoliamo la derivata e studiamo il segno:

$$\begin{aligned} V'(x) = (l - 2x)^2 + x2(l - 2x)(-2) &\geq 0 \\ (l - 2x)(l - 2x - 4x) &\geq 0 \text{ dato che } (l - 2x) > 0 \\ l - 6x &\geq 0 \\ x &\leq l/6 \end{aligned}$$

Perciò  $x = l/6$  è un massimo, in corrispondenza del quale  $y = 2l/3$  e il volume è  $V = 2l^3/27$ .

**Esercizio 13** Data la famiglia di funzioni  $f_a(x) = x^3 - 3ax^2 + a^2$  con  $a > 0$  si determini quella che nel punto di minimo locale assume il valore massimo.

### Soluzione

Il minimo della funzione  $f_a$  si ottiene studiando il segno della sua derivata:

$$f'_a(x) = 3x^2 - 6ax \tag{5}$$

Studiando il segno della (5) si ottiene che c'è un minimo locale in  $x = 2a$  il cui valore è  $f_a(2a) = -4a^3 + a^2$ . Affinché questo valore sia massimo  $a$  deve essere uno zero della derivata di  $f_a(2a)$  rispetto al parametro  $a$ .

$$\begin{aligned} \frac{d f_a(2a)}{da} = -12a^2 + 2a &\geq 0 \\ 2a(1 - 6a) &\geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Utilizzando la regola dei segni nella (6) si ottiene che per  $a = 1/6$  si ha un massimo che vale  $-4(1/6)2 + (1/6)^2$ .

**Esercizio 14** Tra le cubiche di equazione  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  determinare quella che ha un minimo locale in  $x = -1$  che vale 0 e un massimo locale in  $x = 1$  che vale 8.

### Soluzione

I massimi e i minimi sono estremi perciò annullano la derivata, inoltre questi punti appartengono alla curva cioè verificano la sua equazione. Calcoliamo la derivata  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$  e scriviamo il sistema che traduce le richieste:

$$\begin{cases} 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 & -1 \text{ è minimo} \\ a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 0 & \text{passa per } (-1, 0) \\ 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0 & 1 \text{ è massimo} \\ a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = 8 & \text{passa per } (1, 8) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene  $a = -2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 6$  e  $d = 4$ .

**Esercizio 15** Una aeromobile percorre  $n$  chilometri alla velocità  $w$  (in chilometri orari); sia  $c$  il costo di un quintale di combustibile e  $q$  la spesa oraria per il personale di volo. Ammettendo che il consumo  $C$  del carburante in quintali per chilometro sia proporzionale al quadrato della velocità  $w$ , determinare il valore della velocità che corrisponde alla spesa minima per personale e per il combustibile.

### Soluzione

Il costo totale è la somma fra il costo del personale e il costo del carburante, inoltre la supposizione sul consumo  $C$  si traduce nella formula  $C = kw^2$  con  $k$  la costante di proporzionalità. Allora il costo del carburante per  $n$  chilometri è:

$$C_{carb} = nkw^2c$$

mentre il costo del personale si ottiene moltiplicando il tempo di percorrenza del volo  $n/w$  per il costo orario del personale  $q$ :

$$C_{pers} = q\frac{n}{w}$$

La funzione da studiare è perciò:

$$C_{tot} = f(w) = nkw^2c + q\frac{n}{w} \quad (7)$$

Per determinare gli estremi (7) si deve studiare il segno della derivata prima.

$$\begin{aligned}
 f'(w) = 2nkcw - \frac{qn}{w^2} &\geq 0 \\
 \frac{2nckw^3 - qn}{w^2} &\geq 0 \\
 w^3 &\geq \frac{q}{2ck} \quad (\text{essendo elevato alla terza}) \\
 w &\geq \sqrt[3]{\frac{q}{2ck}} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Dunque in corrispondenza della velocità  $w = \sqrt[3]{\frac{q}{2ck}}$  si ha un minimo del costo totale.

**Esercizio 16** Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti delle seguenti funzioni:

1.  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$  in  $[-5/2, 2]$ ;
2.  $f(x) = x^3 - 3x$  in  $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$ ;
3.  $f(x) = \sqrt{x - 4x^2}$  in  $[0, 4]$ ;
4.  $f(x) = |\sin x|$  in  $[-3\pi/4, 2\pi/3]$ .

### Soluzione del punto 1

Dato che  $f(x)$  è continua nell'intervallo di definizione (in realtà su tutto  $\mathbb{R}$ ), per il teorema di Weirestrass ammette massimi e minimi assoluti. Cerchiamo i relativi analizzando la sua derivata:

$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+2)^2}}$$

che ha dominio  $x \neq 0, -3$ . Dato che  $0 \in [-5/2, 2]$ , la funzione non è derivabile in 0, dovremo perciò studiare il segno della derivata nei due intervalli  $[-5/2, 0)$  e  $(0, 2]$ .

$$\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+2)^2}} \geq 0 \quad (9)$$

dato che la radice è cubica il segno viene mantenuto anche se togliamo la radice, perciò la (9) equivale a:

$$\begin{aligned}
 \frac{x+2}{x(x+2)^2} &\geq 0 \quad \text{dato che } -3 \notin [-5/2, 0), (x+2)^2 > 0 \\
 \frac{x+2}{x} &\geq 0
 \end{aligned}$$

Le soluzioni si deducono dalla regola dei segni e sono  $(x < -2) \vee (x > 0)$ , dunque, dato che  $-2 \in [-5/2, 0)$ ,  $x = -2$  è un massimo relativo. Inoltre, pur non essendo derivabile in 0, notiamo che la funzione decresce prima di 0 e cresce dopo, perciò  $x = 0$  è un minimo relativo. Per determinare i massimi e minimi assoluti valutiamo la funzione in  $-2$  e 0:

$$f(-2) = \sqrt[3]{-8 + 12} = \sqrt[3]{4}; \quad f(0) = 0. \quad (10)$$

Siccome dobbiamo trovare i massimi e minimi assoluti e questi possono essere assunti anche agli estremi, calcoliamo:

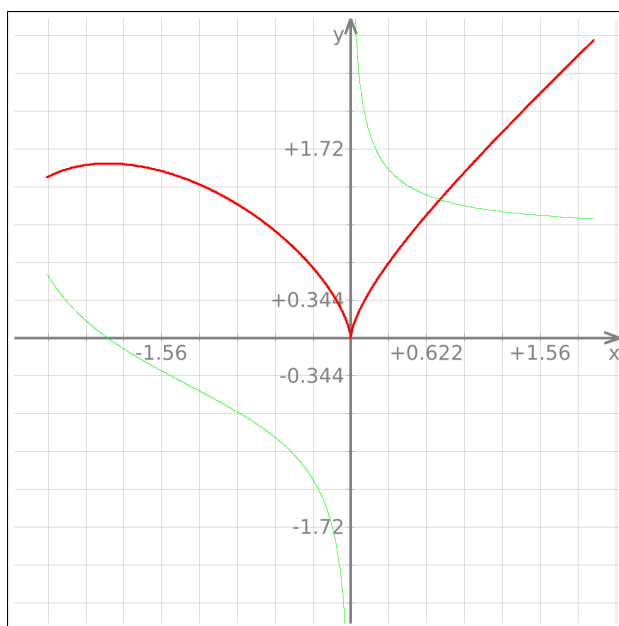
$$f(-5/2) = \sqrt[3]{25}/2 \quad f(2) = \sqrt[3]{20} \quad (11)$$

Mettendo in ordine i valori delle (10) e (11) otteniamo:

$$0 < \sqrt[3]{25}/2 < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{20}$$

Perciò  $x = 0$  è il minimo assoluto e  $x = 2$  è il massimo assoluto.

Riportiamo il grafico della funzione studiata (tratto rosso più spesso) e della sua derivata (tratto verde). Si noterà che in zero la funzione ha una cuspide a tangente verticale, la funzione è perciò non derivabile, infatti in quel punto la derivata ha un asintoto verticale.

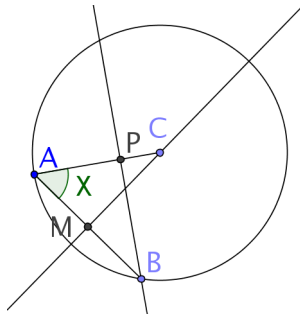


**Esercizio 17** *Lasciamo allo studente volenteroso l'onore e l'onere di completare l'esercizio precedente.*

**Esercizio 18** *A quali condizioni devono soddisfare i coefficienti  $a$  e  $b$  della funzione  $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x$  affinché essa abbia un massimo o un minimo in  $x = \pi/4$ .*

[ $a = 1$ ]

**Esercizio 19** Sia  $AB$  un segmento di lunghezza 1, disegnare una circonferenza con centro sull'asse di  $AB$  passante per i punti  $A$  e  $B$ . Indicata con  $P$  la proiezione ortogonale di  $AB$  sulla retta  $AC$ , esprimere la differenza  $AC^2 - BP^2$  in funzione dell'angolo  $\widehat{BAC} = x$  e determinare il valore minimo assunto da tale differenza.



### Soluzione

Dato che  $AMC$  e  $ABP$  sono triangoli rettangoli  $AC = \frac{1/2}{\cos x}$  e  $BP = 1 \cdot \sin x$ . Perciò la funzione da studiare è:

$$f(x) = AC^2 - BP^2 = \frac{1}{4 \cos^2 x} - \sin^2 x$$

Con la restrizione  $0 < x < \pi/2$ .

Studiamo il segno della derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{4 \cos^3 x} (-\sin x) - 2 \sin x \cos x \geq 0 \\ &= \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} (1/4 - \cos^4 x) \geq 0 \\ &\left( \text{dato che } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ è } \frac{\sin x}{\cos^3 x} > 0 \text{ quindi} \right) \\ &\cos^4 x \leq 1/4 \quad (12) \end{aligned}$$

La soluzione della (12) è  $(\pi/4, \pi/2)$ , quindi  $x = \pi/4$  è un minimo.

**Esercizio 20** In un giuoco d'azzardo che consiste in tre prove ripetute, si vince se il successo si verifica una e una sola volta. Supponendo che un giocatore possa truccare il giuoco, qual è la probabilità  $p$  da assegnare al successo che renda il giuoco a lui più conveniente?

### Soluzione

Se  $p$  è la probabilità con  $0 < p < 1$  allora la probabilità di avere successo la prima volta e insuccesso le altre due è  $p(1-p)(1-p)$ , infatti  $p$  è la probabilità

di avere successo e  $(1 - p)$  quella opposta. Ora le situazioni favorevoli sono tre (successo la prima volta, o successo la seconda volta, o successo la terza), dunque la probabilità totale di vittoria è data dalla funzione:

$$f(p) = 3p(1 - p)^2$$

Dobbiamo trovare il valore da assegnare a  $p$  affinché sia massima  $f(p)$ , in altre parole dobbiamo trovare il possibile massimo<sup>2</sup> di  $f(p)$  nell'intervallo  $(0, 1)$ . Studiamo il segno della derivata di  $f(p)$ :

$$\begin{aligned} f'(p) &= 3(1 - p)^2 + 3p \cdot 2(1 - p)(-1) \geq 0 \\ 3(1 - p)(1 - p - 2p) &\geq 0 \\ 3(1 - p)(1 - 3p) &\geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Siccome  $0 < p < 1$  vale che  $1 - p > 0$  dunque la disuguaglianza (13) si riduce nella disequazione  $1 - 3p \geq 0$  che ha soluzione  $p \leq 1/3$ . Quindi per  $p = 1/3$  si ha un massimo è la probabilità di vittoria è  $f(1/3) = 4/9$ , siccome  $f(0) = f(1) = 0$  è anche il massimo assoluto.

**Esercizio 21** Data la funzione  $f(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ , trovare i punti di massimo e minimo e gli intervalli in cui è invertibile. \*

**Esercizio 22** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - x^2)}$$

**Soluzione**

$x \neq 0$ ,  $x \neq \pm 1$ , quindi il dominio è l'insieme  $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

È inoltre evidente che  $f(x)$  non interseca mai l'asse delle ascisse e, visto il dominio, neanche quello delle ordinate.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= 0; & \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= +\infty; & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty; & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Verificare questi limiti con molta attenzione!

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2(1 - x^2)^2}$$

Dato che  $x^2 > 0$  e  $(1 - x^2)^2 > 0 \forall x \in D$ .

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x < -\frac{\sqrt{3}}{3}) \vee (x > \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

<sup>2</sup>il massimo assoluto non è garantito che ci sia perché, pur essendo  $f$  continua il dominio cono è chiuso e limitato

C.E.

Int. assi

Limiti

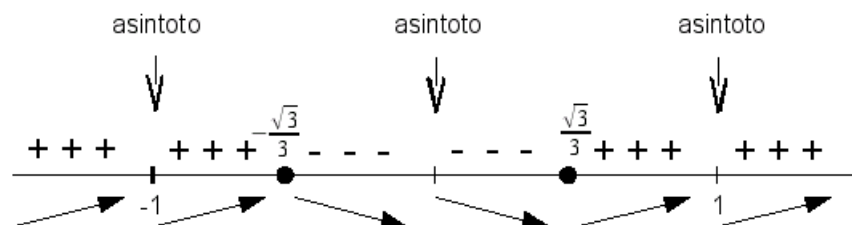
Derivata

Sgn.  $f'$ 

Max &amp;

min

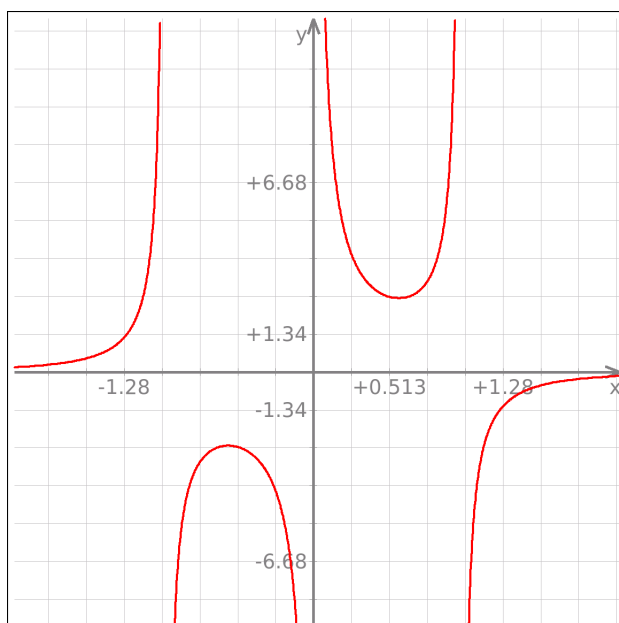
Riassumiamo il segno della derivata nello schema seguente, evidenziando il dominio, i tratti di monotonia della funzione e gli estremi.



Dai limiti si deduce che  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  e  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  sono rispettivamente massimo e minimo relativi, massimi e minimi assoluti non sono presenti.

Grafico

Mettendo insieme le informazioni ottenute si deduce che il grafico della funzione, si noterà che il grafico è simmetrico rispetto all'origine, questo fatto era deducibile dalla disparità della funzione.



**Esercizio 23** Studiare la funzione:

$$f(x) = x \cos x - \sin x$$

**Soluzione**

Dato che  $f(-x) = -x \cos(-x) - \sin(-x) = -x \cos x + \sin x = -f(x)$  la funzione è perciò dispari.

$D = \mathbb{R}$  e per la disparità basterà studiare la funzione in  $[0, +\infty)$ .

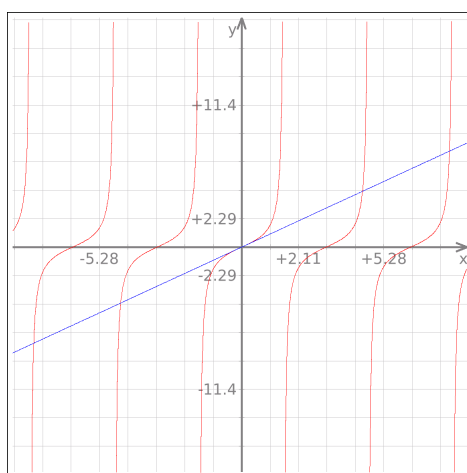
Parità

C.E.

Int. assi

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0 \\
 x \cos x - \sin x &= 0 \\
 \tan x &= x
 \end{aligned}$$

Questa equazione non è risolvibile per via elementare, però possiamo confrontare i grafici e renderci conto di come la retta  $y = x$  interseca la curva  $y = \tan x$ , il grafico seguente dovrebbe chiarire.



Evidentemente vi sono infinite soluzioni che si avvicinano via via a multipli dispari di  $\pi/2$  restando più piccole nell'asse delle ascisse positive, essendo invece più grandi per valori negativi.

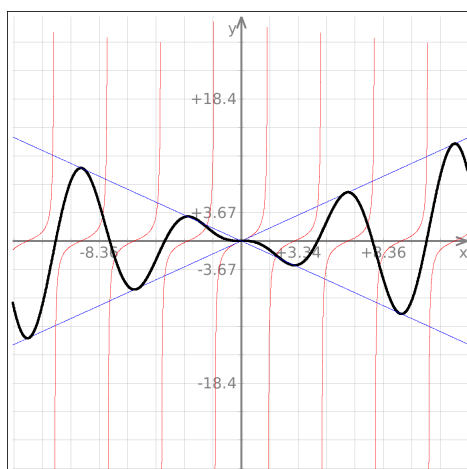
Segn.  $f'$

$$\begin{aligned}
 f'(x) = -x \sin x &\geq 0 \\
 x \sin x &\leq 0 \\
 \sin x &\leq 0 \text{ dato che } x \geq 0
 \end{aligned}$$

Quindi cresce quando  $\cos x$  è negativo, cioè per  $(2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi$  quindi i minimi locali sono i multipli pari di  $\pi$  cioè  $x = 2n\pi$ .

grafico

Le informazioni raccolte fino ad ora vengono utilizzate per costruire il grafico della funzione, abbiamo sovrapposto anche i grafici dello studio del segno per evidenziare la correlazione con la funzione.



**Esercizio 24** Studiare le seguenti funzioni:

\*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} \text{ (PNI1994)} \quad f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \text{ (PNI1994)}$$

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \text{ (PNI2002)} \quad f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2} \text{ (1992)}$$

$$f(x) = e^{-x} \cos x \text{ (1992)}; \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2 \ln x) + 1 \text{ (2005)}$$

**Esercizio 25** (2004) In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \sin x}{\cos x} \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Dimostrare che sono curve periodiche di periodo  $2\pi$ , che hanno in comune infiniti punti dei quali si richiedono le coordinate;
2. tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
3. controllato che due curve soddisfano la condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse  $y$  e disegnarle nell'intervallo  $-\pi \leq x \leq \pi$  dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

### Soluzione del punto 1

Le curve sono periodiche di periodo  $2\pi$  se  $f(x + 2\pi) = f(x) \forall x$ , infatti:

$$f(x + 2\pi) = \frac{1 + a \sin(x + 2\pi)}{\cos(x + 2\pi)} = (\sin, \cos, \text{periodiche}) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x} = f(x)$$

Due curve distinte sono determinate da parametri  $a, b$  distinti, se hanno punti in comune devono soddisfare l'equazione:

$$\begin{aligned}\frac{1 + a \sin x}{\cos x} &= \frac{1 + b \sin x}{\cos x} \\ a \sin x &= b \sin x \\ (a - b) \sin x &= 0 \text{ (essendo } a \neq b) \\ \sin x &= 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Per determinare le ordinate basta calcolare  $y(k\pi) = 1/\cos(k\pi) = (-1)^k$ , quindi i punti in comune hanno coordinate  $(k\pi, (-1)^k)$ .

### Soluzione del punto 2

Dato che la retta è orizzontale i punti di eventuale tangenza devono essere estremi, cioè annullano la derivata e devono avere ordinata  $\sqrt{3}/2$ :

$$\begin{aligned}y' &= \frac{a + \sin x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \\ y &= \frac{1 + a \sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\tag{14}$$

Siccome  $\sin x = -a$ , sostituendo nella (14), otteniamo:

$$\frac{1 + a(-a)}{\pm\sqrt{1-a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \pm\sqrt{1-a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La radice non può essere negativa quindi

$$1 - a^2 = 3/4 \Rightarrow a = \pm 1/2$$

### Soluzione del punto 3

$$y_1 = \frac{1 + 1/2 \sin x}{\cos x}; \quad y_2 = \frac{1 - 1/2 \sin x}{\cos x}$$

infatti  $y_1(-x) = y_2(x)$ , quindi sono simmetriche rispetto all'asse  $y$ .

Dominio:  $\cos x \neq 0$  in  $[-\pi, \pi]$  quindi  $x \neq \pm\pi/2$ . Quindi il dominio è:  $[-\pi, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$

Intersezione assi:  $y(0) = 1, y(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \Rightarrow \text{mai}$

Segno:  $y_1 \geq 0$  cioè  $\frac{1-1/2\sin x}{\cos x}$ , dato che  $1 - 1/2 \sin x > 0 \forall x$  equivale a  $\cos x > 0 \Rightarrow x \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Limiti:

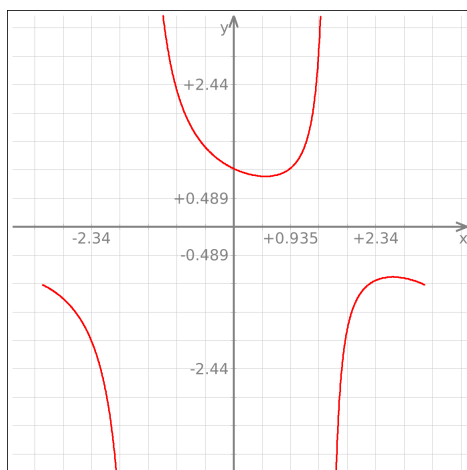
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y_2 &= +\infty; & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y_2 &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} y_2 &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} y_2 &= +\infty.\end{aligned}$$

Massimi e minimi:

$$y'_2 = \frac{-1/2 + \sin x}{\cos^2 x} \geq 0$$

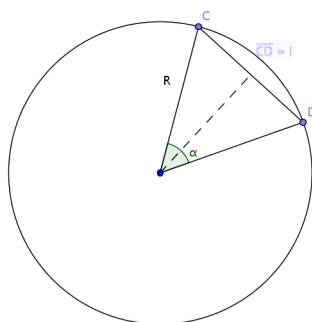
$$\sin x \geq 1/2 \Rightarrow -\pi/2 < x < \pi$$

Perciò la funzione è crescente nel tratto in cui la derivata prima è positiva.



Il grafico di  $y_1$  si ottiene applicando una simmetria assiale di asse  $y$ .

**Esercizio 26** Attraverso lo studio di una opportuna funzione dimostrare che il perimetro dei poligoni regolari inscritti in un cerchio cresce col crescere del numero dei lati.



**Soluzione**

Se il poligono ha  $n$  lati allora  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ,  $l = 2R \sin(\alpha/2) = 2R \sin(\pi/n)$ , il perimetro è  $p(n) = nl = 2Rn \sin(\pi/n)$ .

Ci interessa calcolare il limite:

$$\lim_n 2Rn \sin(\pi/n) \stackrel{x=\pi/n}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2R\pi \frac{\sin x}{x} = 2R\pi$$

Quindi la funzione perimetro  $p(n)$  tende alla lunghezza della circonferenza.

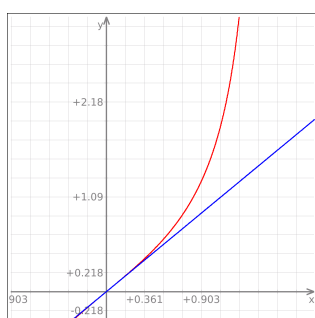
Verifichiamo ora che lo fa crescendo. Basterà studiare la crescita della funzione reale  $f(x) = 2Rx \sin(\pi/x)$  con  $x > 0$  perché la funzione  $p(n)$  è una sua restrizione ai numeri naturali.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2R \sin(\pi/x) + 2Rx \cos(\pi/x)(-\pi/x^2) \geq 0 \\ 2R(\sin(\pi/x) - \pi/x \cos(\pi/x)) &\geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Ora,  $R > 0$  e siccome  $x$  tende a infinito si può supporre che  $x > 3$  quindi  $\pi/x < \pi/2$ , perciò  $\sin(\pi/x) > 0$  e  $\cos(\pi/x) > 0$ , quindi nella disequazione (15) si può dividere per  $\cos(\pi/x)$  per ottenere:

$$\begin{aligned} \tan(\pi/x) &> \pi/x \text{ con } x > 3; \text{ posto } y = \pi/x \\ \tan y &> y \text{ con } 0 < y < \pi/3 \end{aligned} \quad (16)$$

Riportiamo il grafico di  $y = \tan x$  e di  $y = x$ .



Evidentemente  $\tan x > x$  per  $0 < x < \pi/2$ , quindi la (16) è certamente verificata e quindi la derivata è sempre positiva quindi la funzione  $f(x)$  è crescente.

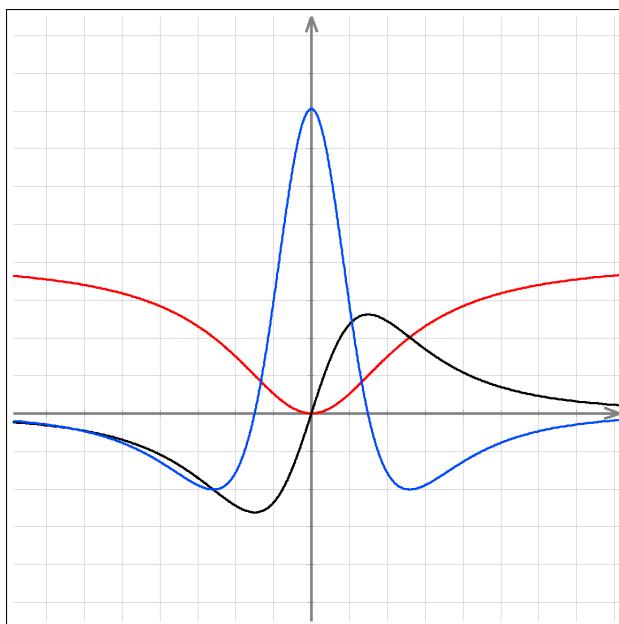
**Esercizio 27** Studiare le seguenti funzioni periodiche:

\*

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}; & \text{b) } f(x) &= \frac{1}{2 \sin^2 x - 1}; \\ \text{c) } f(x) &= \frac{1}{2} \sin 2x + 1; & \text{d) } f(x) &= \frac{\cos x - a}{\sin x + a}; \\ \text{e) } f(x) &= 2 \sin^2 x + 4 \sin x - \frac{5}{2}; & \text{f) } f(x) &= \sin x - \cos x. \end{aligned}$$

**Esercizio 28** Il disegno seguente riporta i grafici di una funzione e delle sue derivate (prima e seconda). Individua il grafico di ciascuna. Sapresti scrivere la legge di una funzione che si rispecchia nell'esercizio?

\*



\*

**Esercizio 29** Calcola la derivata delle seguenti funzioni:

$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x; \quad y = 2 \arcsin x - \arccos(1-2x^2); \quad x > 0.$$

Dal risultato quali conseguenze puoi trarre?

**Esercizio 30** Per quali valori di  $\alpha$  la funzione

$$f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$$

risulta crescente per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ?

**Soluzione**

Bisogna che la sua derivata prima sia positiva per ogni  $x$  reale. Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha - \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dots \\ \dots &= \frac{x^4(\alpha - 1) + x^2(2\alpha - 3) + \alpha}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Dato che  $(1+x^2)^2 > 0$  basta che

$$x^4(\alpha - 1) + x^2(2\alpha - 3) + \alpha \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ovvero che la funzione  $g(x) = x^4(\alpha - 1) + x^2(2\alpha - 3) + \alpha$  abbia un minimo assoluto maggiore o uguale a zero.

Ponendo  $t = x^2$  la funzione diventa una parabola e scrivendo l'ordinata del vertice positiva si ottiene<sup>3</sup>  $\alpha > 9/8$ .

**Esercizio 31** *Applicando il teorema di Lagrange agli intervalli di estremi 1 e  $x$ , provare che  $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$  e dare del risultato una interpretazione grafica. (PNI 2002)*

### Soluzione

Gli intervalli da analizzare sono di due tipi  $[x, 1]$  e  $[1, x]$ , a seconda che  $x > 1$  o  $0 < x < 1$  ( $x > 0$  perché è argomento del logaritmo).

**Intervallo  $[x, 1]$  e  $f(x) = \ln x$**

Posto  $f(x) = \ln x$  le ipotesi del teorema sono verificate (controllare!), perciò esiste  $c \in (x, 1)$  tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} = \frac{1}{c} > 1 \quad \left( \text{siccome } c < 1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 1 \right)$$

$$\frac{-\ln x}{1 - x} > 1 \Rightarrow -\ln x > 1 - x \Rightarrow \ln x < x - 1$$

**Intervallo  $[1, x]$  e  $f(x) = \ln x$**

$f(x)$  come prima,  $c \in [1, x]$ :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c} < 1 \quad \left( \text{siccome } c > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} < 1 \right)$$

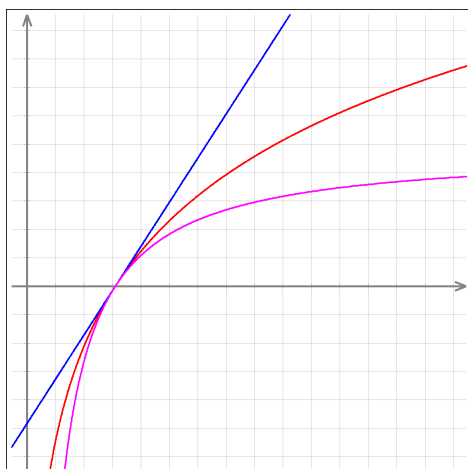
$$\frac{\ln x}{x - 1} < 1 \Rightarrow \ln x < x - 1$$

Concludendo  $\ln x \leq x - 1$ ,  $\forall x > 0$  l'uguaglianza vale solo se  $x = 1$ .

Per provare la disuguaglianza  $1 - \frac{1}{x} < \ln x$ , basta ricalcare quanto fatto con la funzione  $g(x) = x \ln x$ .

Il grafico seguente riporta chiaramente che la funzione di mezzo  $\ln x$  è "compresa" fra la retta  $y = x - 1$  e il ramo di iperbole  $y = 1 - 1/x$ .

<sup>3</sup>e vero sono stato sbrigativo, ma Monica mi sta chiamando perché è pronta la cena...



**Esercizio 32** Si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x + 1 & \text{per } x \geq 0 \\ e^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

nell'intervallo  $[-2, 2]$ ? Se sì trova  $c$ .

### Soluzione

Le due componenti della funzione sono continue e derivabile  $\forall x$ , si tratta di vedere se lo è anche  $f$  in 0. Se verificiamo la derivabilità in 0 abbiamo automaticamente la continuità (cfr  $D \Rightarrow C$ ).

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & \text{per } x \geq 0 \\ e^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -3x^2 + 1 = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$$

Sono uguali perciò la funzione è derivabile in tutti l'intervallo; troviamo  $c$ :

$$-3c^2 + 1 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}/3e^c = 0 \text{ mai}$$

ma solo  $c = \sqrt{3}/3 > 0$  quindi è l'unico valido.

**Esercizio 33** Determinare  $a, b, c$  affinché valga il teorema di Rolle nell'intervallo  $[-1, 4]$  per la funzione: \*

$$f'(x) = \begin{cases} -ax^2 + 3x + c & \text{per } x \leq 2 \\ \frac{b}{x^2} & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

[sol.  $a = 15/8, b = 18, c = 6$ ]

**Esercizio 34** Verificare che la funzione è continua e derivabile in  $x = 0$ : \*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{per } x \leq 0 \\ (2x + 1)e^x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

**Esercizio 35** Idem per: \*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x^2 + x + 1) & \text{per } x \leq 0 \\ -3x^2 - 3x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

**Esercizio 36** Dimostrare che se  $p(x)$  è un polinomio allora fra due radici distinte reali di  $p(x)$  c'è sempre una radice di  $p'(x)$ .

### Soluzione

Siano  $x_1$  e  $x_2$  tali radici (supponiamo senza perdere di generalità che  $x_1 < x_2$ , altrimenti basterebbe invertire i nomi), allora per il teorema di Rolle applicato<sup>4</sup> all'intervallo  $[x_1, x_2]$  esiste  $c$  con  $x_1 < c < x_2$  tale che  $p'(c) = 0$ , ciò prova l'asserto.

**Esercizio 37** Dimostrare che  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Soluzione

Se  $a = b$  la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo perciò  $b > a$ , allora applicando Lagrange alla funzione  $\sin x$  nell'intervallo  $[a, b]$  si ottiene che:

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c \quad \text{con } c \in [a, b], \quad (17)$$

ma  $-1 < \cos x < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , quindi, essendo  $b > a$ , la (17) implica:

$$-(b - a) \leq (\sin b - \sin a) \leq (b - a) \Rightarrow \sin b - \sin a \leq |b - a|. \quad (18)$$

Se invece  $b < a$ , con la stessa argomentazione, si giunge a:

$$-(a - b) \leq (\sin a - \sin b) \leq (a - b) \Rightarrow \sin a - \sin b \leq |b - a|. \quad (19)$$

Le due disuguaglianze (18) e (19) provano la consegna.

**Esercizio 38** Si vuole che  $x^3 - bx - 7 = 0$  abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di  $b$ ? (PNI 2003) \*

$$[\text{sol. } b < - - 3\sqrt[3]{\frac{49}{4}} \approx -6,91]$$

**Esercizio 39** Dimostrare senza risolverla che l'equazione  $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 6 = 0$  ammette una soluzione reale. \*

**Esercizio 40** Verificare che  $f(x) = e^{-x} + x^{-1}$  è invertibile per  $x > 0$  e, detta  $g$  la sua inversa, calcolare  $g'(1 + e^{-1})$ . (2002) \*

**Esercizio 41** Verificare che  $f(x) = 3x + \ln x$ , definita per  $x > 0$ , è strettamente crescente. Detta  $g$  la sua inversa, calcolare  $g'(3)$ . (PNI 2002) \*

**Esercizio 42** In quante parti uguali si deve dividere un numero reale positivo  $a$  in modo che il loro prodotto sia massimo? \*

---

<sup>4</sup>ovviamente valgono le ipotesi, provatelo!